

EJERCICIOS ASÍNTOTAS

Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

1) $y = \frac{x}{x+3}$

2) $y = \frac{2x}{x^2-1}$

3) $y = \frac{2}{3x+6}$

4) $y = \frac{2}{(x-2)^2}$

SOLUCIONES

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+3} = 1 \Rightarrow$ asíntota horizontal en $y=1$, veamos ahora cómo se sitúa la curva respecto

de esta asíntota: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+3} = 1$ y para valores grandes de x , p.ej.

$x = 10000 \Rightarrow y = \frac{10000}{10003} = 0,9997$ vemos que la curva se acerca “por debajo de la recta $y=1$ ”

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+3} = 1$ y para valores grandes de x , p.ej. $x = -10000 \Rightarrow y = \frac{-10000}{-9997} = 1,0003$

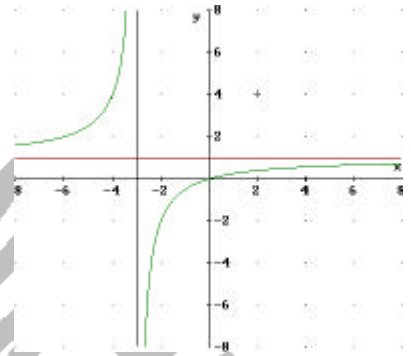
vemos que la curva se acerca “por encima de la recta $y=1$ ”

También tiene una asíntota vertical en $x = -3$ (cuando se anula el denominador) ya que:

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{0} = \infty$ pero, veamos los signos, por la izquierda y por la derecha:

A la izquierda p. Ej: $x = -3 - 0,01 = -3,01 \Rightarrow \frac{-3,01}{-0,01} = \frac{-}{-} = +$

A la derecha p. Ej: $x = -3 + 0,01 = -2,99 \Rightarrow \frac{-2,99}{0,01} = \frac{-}{+} = -$



Por lo tanto, tenemos una A.V. de ramas divergentes.

Gráficamente, tendremos por tanto, algo así

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow$ asíntota horizontal el eje OX, veamos el comportamiento al acercarse

por ambos lados: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow x = 10000 \Rightarrow y = \frac{20000}{99999999} = 0,0002 > 0$ (por encima del

eje); $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow x = -10000 \Rightarrow y = \frac{-20000}{99999999} = -0,0002 < 0$ (por debajo del eje)

Asíntota vertical cuando $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (tenemos, dos asíntotas verticales)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \infty$, por la izquierda: $1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow y = \frac{1,98}{-0,0199} = \frac{+}{-} = -$

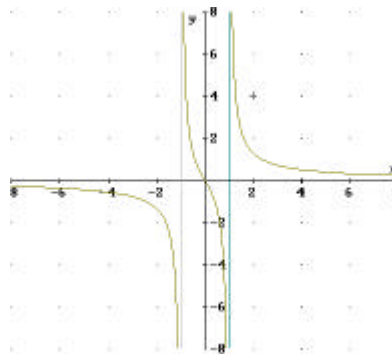
por la derecha: $1 + 0,01 = 1,01 \Rightarrow y = \frac{2,02}{0,0201} = \frac{+}{+} = +$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0} = \infty$, por la izquierda: $-1 - 0,01 = -1,01 \Rightarrow y = \frac{-2,02}{0,0201} = \frac{-}{+} = -$

por la derecha:

$$1 + 0,01 = 1,01 \Rightarrow y = \frac{-1,98}{-0,0199} = \frac{-}{-} = +$$

Luego, la gráfica será:

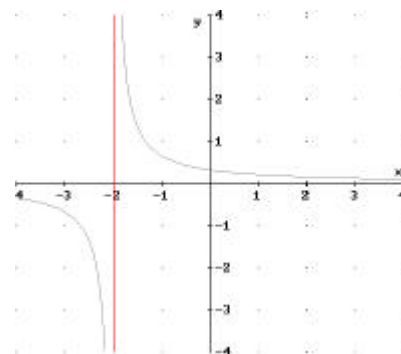


3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x+6} = 0$ Asíntota horizontal el eje OX

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x+6} \Rightarrow x = 10000 \Rightarrow y = \frac{2}{30006} > 0 \text{ (por encima del eje) ;}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+6} \Rightarrow x = -10000 \Rightarrow y = \frac{2}{-29994} < 0 \text{ (por debajo del eje)}$$

Asíntota vertical: $3x+6=0 \Rightarrow x=-2$ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{3x+6} = \frac{2}{0} = \infty$



por la izquierda: $-2 - 0,01 = -2,01 \Rightarrow y = \frac{+}{-} = -$

por la derecha: $-2 + 0,01 = -1,99 \Rightarrow y = \frac{+}{+} = +$

4) $y = \frac{2}{(x-2)^2}$ Asíntota vertical en $x=2$ ya que se verifica que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2} = +\infty$

y es siempre positivo, por estar el denominador elevado al cuadrado. (Asíntota de ramas convergentes, por arriba) y además $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(x-2)^2} = 0$ Asíntota horizontal el eje OX

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-2)^2} \Rightarrow x = 10000 \Rightarrow y = \frac{2}{+} > 0 \text{ (por encima del eje) ;}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-2)^2} \Rightarrow x = -10000 \Rightarrow y = \frac{2}{+} > 0 \text{ (por encima del eje)}$$

